Feuille d'exercices numéro 8 : espaces vectoriels.

ECS1 Lycée Henri IV.

2013–2014.

Exercice 1

1. Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en déterminer une base.

(a) $F = \{(3x, x+y, y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(b) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x+y=0,\ y+z=0\}$.

(c) Montrer que F et G sont supplémentaires.

2. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Le cas échéant, donner une base.

(a) L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

(b) L'ensemble des suites qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 1$.

(c) L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 3 qui vérifient $P(0) = P(1) = 0$.

(d) L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 5 qui vérifient $P(0) = P'(0) = P''(1) = P''(-1) = 0$.

3. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles. Montrer que pour tout couple de coefficients $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des suites vérifiant l'équation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En donner une base lorsque

- $(a,b) = (0,0)$,
- $a^2 = 4b$,
- $0 < a^2 < 4b$.

Exercice 2

Rappeler la formule de Taylor pour un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha \in \mathbb{K}$.

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P dans cette base ?

Exercice 3

Qu'a-t-on entre autres démontré dans l'exercice numéro 3 du DM3 ?

Exercice 4

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$, soit P l'ensemble des polynômes pairs, I l'ensemble des polynômes impairs, et F l'ensemble des polynômes divisibles par $(X-1)^2$.

Montrer que P et I sont deux sev supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X] = P \oplus I$.

Montrer que F est un sev et trouver un sev G supplémentaire du sev F dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une famille strictement croissante de n réels strictement positifs $(a_1, \ldots, a_n)$ avec $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Montrer que la famille $\mathcal{U}_n$ des suites géométriques $((a_i^k)_{k\in\mathbb{N}}, 1 \leq i \leq n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites réelles. On pourra utiliser des limites et raisonner par l'absurde ou par récurrence sur n.

Exercice 6

Montrer que pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, les vecteurs $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$ et $(0, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1, 3, 5)$ dans cette base ?

Quel est le vecteur dont les coordonnées dans cette base sont 1, 3 et 5 ?

Exercice 7

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, 5)$, $\overrightarrow{v_3} = (3, 1, a)$ et $\overrightarrow{v_4} = (2, 1, b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la ou les équations auxquelles doivent satisfaire les composantes d'un élément quelconque $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ du sev F engendré par $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ (autrement dit $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$).

2. Trouver la valeur de a et de b tels que la famille$(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ engendre le même sev que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, autrement dit tels que $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \text{Vect}\,(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, -1, 2)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, -1, 1, 2)$, $\overrightarrow{u_3} = (-1, 0, 1, -1)$ et $\overrightarrow{u_4} = (-1, 1, 0, -1)$.

1. Déterminer une équation de l'espace vectoriel E engendré par les quatre vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_4}$.

2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1, -1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (1, 0, -1, 0)$ et $\overrightarrow{k} = (0, 0, 0, 1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de E. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{u_4}$ dans cette base ?

(On pourra résoudre, pour a, b, c et d donnés quelconques, l'équation d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = (a, b, c, d)$.)